Medida de ángulos

▼ Ángulo

Es la abertura comprendida entre dos semirrectas que tienen un punto en común, llamado vértice.

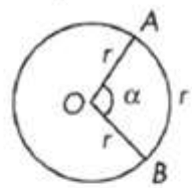
Los ángulos se representa por: $\angle A$, $\angle BAC$, $\hat{a}$ o con letras del alfabeto griego.

▼ Sistemas de medición de ángulos

Sistema sexagesimal. En este sistema se divide la circunferencia en 360 partes, llamadas grados, el grado en sesenta minutos y el minuto en sesenta segundos.

$$1° = 60' \qquad\qquad 1' = 60''$$

Sistema cíclico o circular. Este sistema tiene como unidad fundamental el radián, que es el ángulo central subtendido por un arco, igual a la longitud del radio del círculo y se llama valor natural o valor circular de un ángulo.



➤ Conversión de grados a radianes y radianes a grados:

- Para convertir grados en radianes se multiplica el número en grados por el factor $\frac{\pi}{180°}$, el resultado se simplifica de ser posible.
- Para convertir radianes en grados se multiplica el número en radianes por el factor $\frac{180°}{\pi}$, el resultado se simplifica de ser posible.

Ejemplos

1. 60° en radianes se expresa como:

Solución:
Se multiplica 60° por el factor $\frac{\pi}{180°}$,

$$60°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{60°\pi}{180°} = \frac{1\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\text{ rad}$$

2. $\frac{5\pi}{6}$ en grados, se expresa como:

Solución:
Se multiplica $\frac{5\pi}{6}$ por el factor $\frac{180°}{\pi}$,

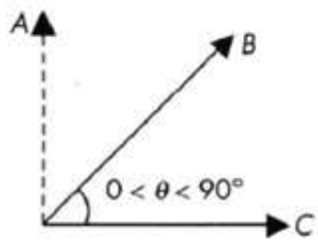
$$\left(\frac{5\pi}{6}\right)\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{900°\pi}{6\pi} = 150°$$

▼ Tipos de ángulos

Los ángulos se clasifican de acuerdo con su medida:

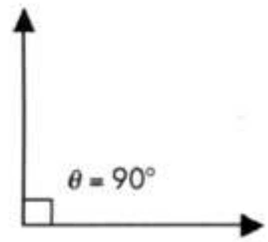
Ángulo agudo

Su magnitud es mayor que 0°, pero menor que 90°



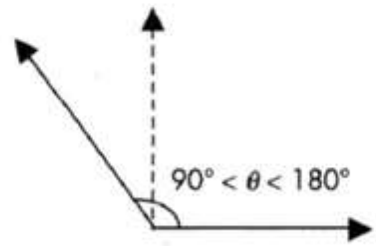
Ángulo recto

Su magnitud es de 90°



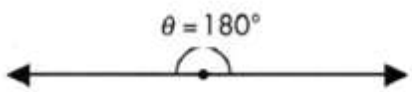
Ángulo obtuso

Su magnitud es mayor que 90°, pero menor que 180°



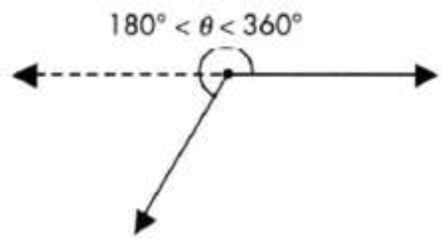
Ángulo llano

Su magnitud es de 180°



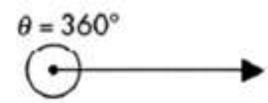
Ángulo entrante

Su magnitud es mayor que 180°, pero menor que 360°



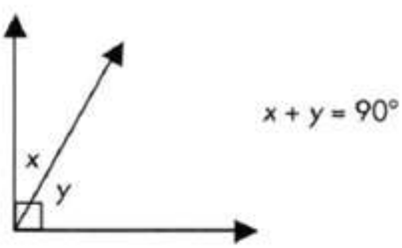
Ángulo perigonal

Su magnitud es de 360°



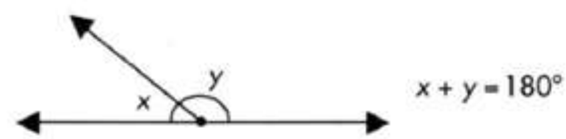
Ángulos complementarios

Son aquellos cuya suma es de 90°



Ángulos suplementarios

Son aquellos cuya suma es de 180°



Ejemplos

1. ¿Cuál es el complemento de 75°?

   Solución:

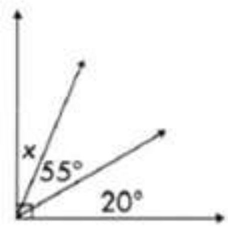
   Sea x = ángulo complementario

   Por definición de ángulos complementarios:

$$x + 75° = 90° \quad \rightarrow \quad x = 90° - 75°$$

$$x = 15°$$

2. De acuerdo con la figura:



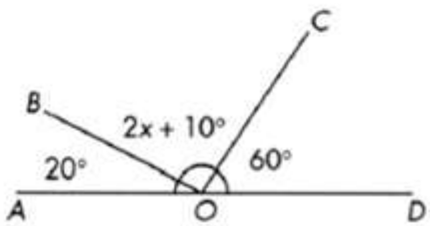
¿Cuál es el valor de x?

Solución:

Los ángulos son complementarios, entonces:

$$x + 55° + 20° = 90°$$
$$x = 90° - 55° - 20°$$
$$x = 15°$$

3. De acuerdo con la figura:



¿Cuál es el valor de x?

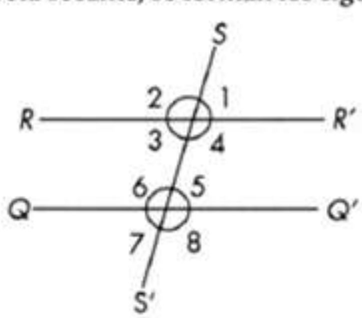
Solución:

La suma de los ángulos forma un ángulo llano, entonces:

$$20° + (2x + 10°) + 60° = 180° \quad \rightarrow \quad 2x + 90° = 180°$$
$$2x = 180° - 90°$$
$$2x = 90°$$
$$x = \frac{90°}{2}$$
$$x = 45°$$

▼ Rectas paralelas cortadas por una secante

Dadas las rectas $\overleftrightarrow{RR'} \parallel \overleftrightarrow{QQ'}$ y $\overleftrightarrow{SS'}$ una recta secante, se forman los siguientes ángulos:



Los cuales se clasifican de la siguiente manera:

- **Ángulos opuestos por el vértice**. Son aquellos que tienen el vértice en común y los lados de uno de los ángulos son la prolongación de los del otro, los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

$$\angle 1 = \angle 3, \quad \angle 2 = \angle 4, \quad \angle 5 = \angle 7 \quad y \quad \angle 6 = \angle 8$$

- **Ángulos alternos internos**. Son ángulos internos no adyacentes situados en distinto lado de la secante. Los ángulos alternos internos son iguales.

$$\angle 3 = \angle 5 \quad y \quad \angle 4 = \angle 6$$

- **Ángulos alternos externos**. Son ángulos externos no adyacentes situados en distinto lado de la secante. Los ángulos alternos externos son iguales.

$$\angle 2 = \angle 8 \quad y \quad \angle 1 = \angle 7$$

- **Ángulos correspondientes o colaterales**. Dos ángulos no adyacentes situados en un mismo lado de la secante. Los ángulos correspondientes o colaterales son iguales.

$$\angle 1 = \angle 5, \quad \angle 2 = \angle 6, \quad \angle 3 = \angle 7 \quad y \quad \angle 4 = \angle 8$$

- **Ángulos adyacentes**. Son aquellos que tienen un lado en común y en las rectas paralelas cortadas por una secante suman 180°, esto es, dos ángulos adyacentes son suplementarios.

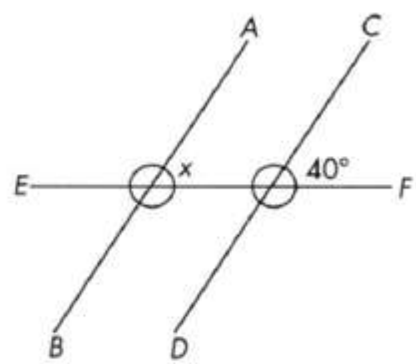
$$\angle 1 + \angle 2 = 180°, \quad \angle 2 + \angle 3 = 180°, \quad \angle 3 + \angle 4 = 180° \quad y \quad \angle 1 + \angle 4 = 180°$$
$$\angle 5 + \angle 6 = 180°, \quad \angle 6 + \angle 7 = 180°, \quad \angle 7 + \angle 8 = 180° \quad y \quad \angle 5 + \angle 8 = 180°$$

- **Ángulos colaterales externos (suplementarios).** Dos ángulos externos no adyacentes situados del mismo lado de la secante. Los ángulos colaterales externos suman 180°.

$$\angle 1 + \angle 8 = 180° \quad y \quad \angle 2 + \angle 7 = 180°$$

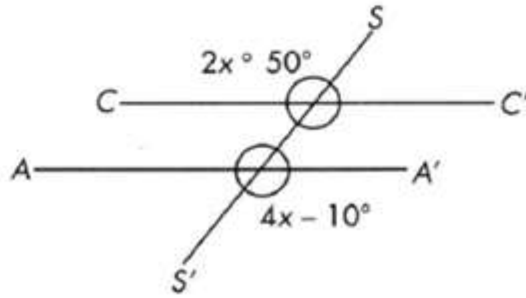
Ejemplos

1. Si $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ es una recta secante, hallar el valor de x en la figura.



Solución:
En la figura los ángulos son correspondientes, entonces $x = 40°$.

2. En la siguiente figura $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$ y $\overleftrightarrow{SS'}$ es una recta secante.



El valor de x en la figura es:

Solución:

Los ángulos $2x + 50°$ y $4x - 10°$ son ángulos alternos externos, por tanto, son iguales, entonces:

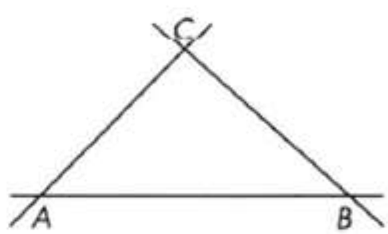
$$4x - 10° = 2x + 50°$$

Se resuelve la ecuación para obtener el valor de x:

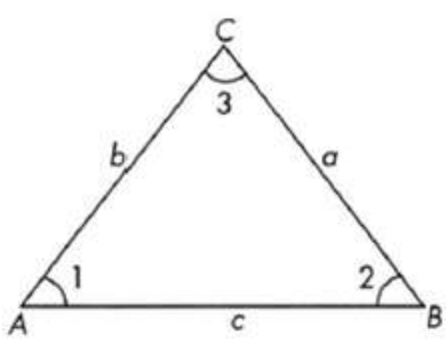
$$4x - 10° = 2x + 50° \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 4x - 2x &= 50° + 10° \\ 2x &= 60° \\ x &= \frac{60°}{2} \\ x &= 30° \end{aligned}$$

Triángulos

Porción de plano limitada por tres rectas que se intersecan una a una en puntos llamados vértices.



▼ Elementos de un triángulo



A, B, C: Vértices

a, b, c: Lados

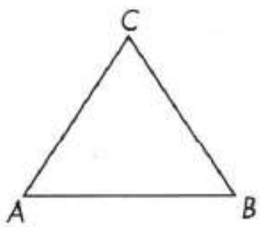
$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$: Ángulos interiores

▼ Clasificación

➤ Por sus lados

Equilátero

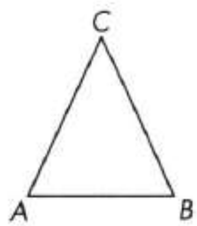
Tiene sus tres lados iguales.



$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$$

Isósceles

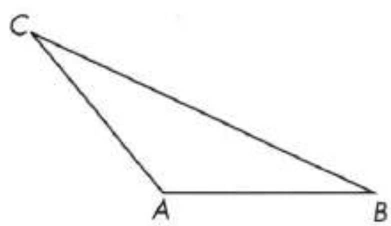
Tiene sólo dos lados iguales.



$$\overline{AC} = \overline{BC} \neq \overline{AB}$$

Escaleno

Tiene tres lados diferentes.

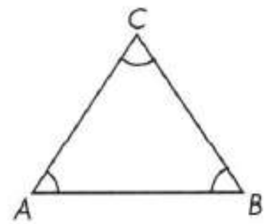


$$\overline{AC} \neq \overline{BC} \neq \overline{AB}$$

➤ Por sus ángulos

Acutángulo

Tiene sus tres ángulos agudos.



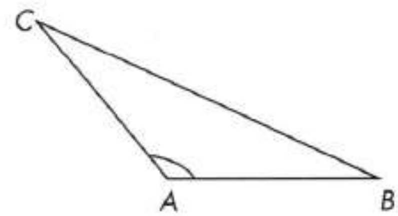
$A < 90°$

$B < 90°$

$C < 90°$

Obtusángulo

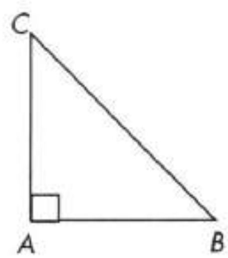
Uno de sus ángulos es obtuso.



$$90° < A < 180°$$

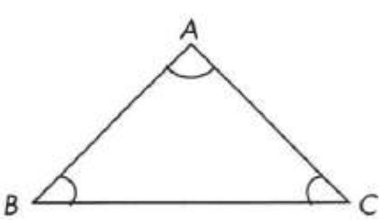
Rectángulo

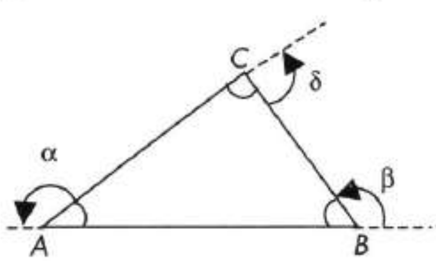
Tiene un ángulo recto



$$A = 90°$$

▼ Teoremas fundamentales de los triángulos





Teorema 1
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

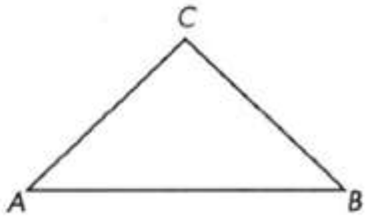
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

Teorema 2
Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

$$\angle B + \angle C = \alpha \quad , \quad \angle A + \angle B = \delta \quad \text{y} \quad \angle A + \angle C = \beta$$

Teorema 3
La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360°.

$$\alpha + \beta + \delta = 360°$$



Teorema 4

La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el otro lado y su diferencia menor que el tercer lado.

$$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$$

Teorema 5

Si dos lados de un triángulo son distintos, al mayor lado se opone un ángulo mayor.

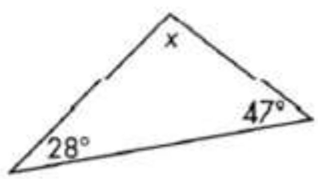
$$\text{Si} \quad \overline{BC} > \overline{AC} \text{ entonces } \angle A > \angle B$$

Teorema 6

Para dos ángulos distintos de un triángulo, al mayor ángulo se opone un lado mayor.

Ejemplos

1. El valor del ángulo x en la siguiente figura es:

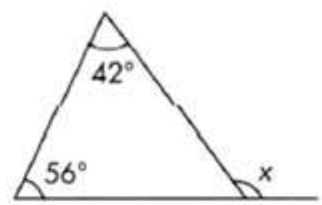


Solución:

En cualquier triángulo la suma de los ángulos interiores es 180°, entonces:

$$x + 28° + 47° = 180° \quad \rightarrow \quad x = 180° - 28° - 47°$$
$$x = 105°$$

2. El valor de x en la siguiente figura es:



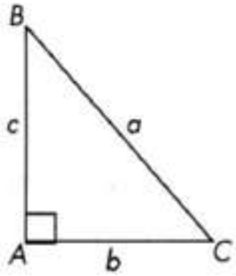
Solución:

En cualquier triángulo un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él, entonces:

$$x = 42° + 56° \quad \rightarrow \quad x = 98°$$

▼ Teorema de Pitágoras

En cualquier triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



Teorema de Pitágoras

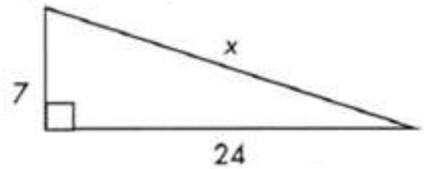
$(\text{hipotenusa})^2 = (1\text{er. cateto})^2 + (2\text{o. cateto})^2$

Donde:

a: hipotenusa
b, c: catetos

Ejemplos

1. El valor de x en el siguiente triángulo rectángulo es:

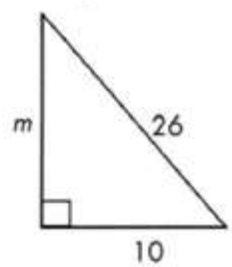


Solución:

De la figura: x = hipotenusa, 1er. cateto = 7, 2o. cateto = 24, los datos se sustituyen en la fórmula:

$$(\text{hipotenusa})^2 = (1\text{er cateto})^2 + (2\text{do cateto})^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = (7)^2 + (24)^2 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x^2 &= 49 + 576 \\ x^2 &= 625 \\ x &= \sqrt{625} \\ x &= 25 \end{aligned}$$

2. El valor de m en el siguiente triángulo rectángulo es:



Solución:

En la figura la hipotenusa = 26, el 1er. cateto = m y el 2o. cateto = 10, los datos se sustituyen en la fórmula:

$$(\text{hipotenusa})^2 = (1\text{er cateto})^2 + (2\text{do cateto})^2 \quad \rightarrow \quad (26)^2 = m^2 + (10)^2 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 676 &= m^2 + 100 \\ 676 - 100 &= m^2 \\ 576 &= m^2 \\ \sqrt{576} &= m \\ 24 &= m \end{aligned}$$

▼ Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño.

➤ Propiedades fundamentales de los triángulos semejantes

1) Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales o congruentes.

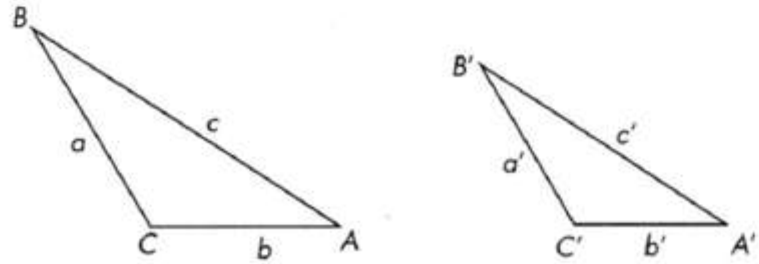
$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B' \text{ y } \angle C = \angle C'$$

2) Dos triángulos son semejantes si la razón de cada par de lados homólogos es constante, es decir, si sus lados son respectivamente proporcionales.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Lados homólogos: Son aquellos cuyos ángulos adyacentes son iguales.

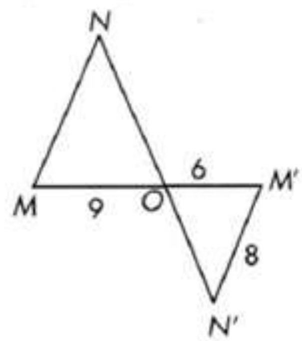
a con a', b con b', c con c'.



Para indicar que dos triángulos son semejantes se escribe $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ donde el símbolo ($\sim$) se lee es semejante.

Ejemplos

1. Si los triángulos de la figura son semejantes, ¿cuál es el valor del lado $\overline{MN}$?



Solución:

Se establece la proporcionalidad entre los lados homólogos:

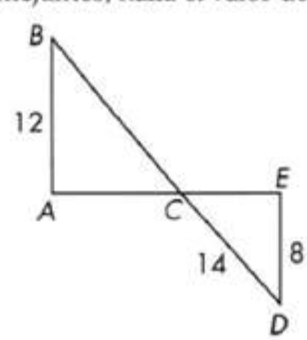
$$\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{O'N'}}$$

de acuerdo con los datos, $\overline{OM} = 9$, $\overline{OM'} = 6$ y $\overline{M'N'} = 8$, entonces se toma la igualdad:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{MN}}{8} = \frac{9}{6} \quad \rightarrow \quad \overline{MN} = \frac{(9)(8)}{6}$$

$$\overline{MN} = 12$$

2. Si los triángulos de la figura son semejantes, halla el valor de $\overline{BC}$.



Solución:
Se establece la proporcionalidad entre los lados homólogos:

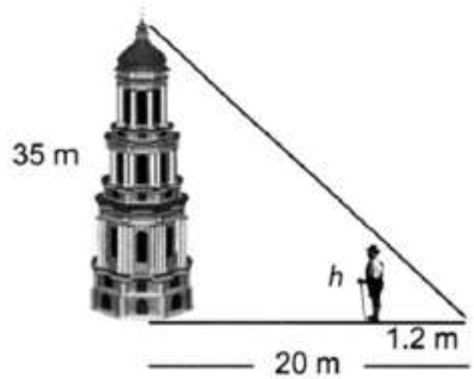
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$$

de acuerdo con la figura, $\overline{AB} = 12$, $\overline{CD} = 14$ y $\overline{DE} = 8$, entonces se aplica la igualdad:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \quad \rightarrow \quad \frac{12}{8} = \frac{\overline{BC}}{14} \quad \rightarrow \quad \overline{BC} = \frac{(12)(14)}{8}$$

$$\overline{BC} = 21$$

3. A cierta hora del día, una torre de 35 m de altura proyecta una sombra de 20 m. ¿Cuál es la altura de una persona que a la misma hora proyecta una sombra de 1.2 m?



Solución:
De acuerdo con los datos,

$$\frac{35}{h} = \frac{20}{1.2} \quad \rightarrow \quad h = \frac{(35)(1.2)}{20}$$

$$h = 2.1$$

Polígonos

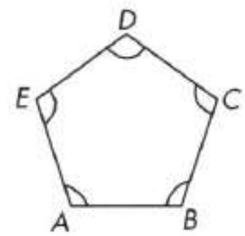
Se llama polígono a aquella figura plana cerrada, que delimitan segmentos de recta. Se clasifican de acuerdo a la medida de sus lados o sus ángulos.

▼ Por sus lados, los polígonos se clasifican en:

- **Regulares**. Los polígonos regulares tienen todos sus lados iguales
- **Irregulares.** Los polígonos irregulares tienen sus lados diferentes.

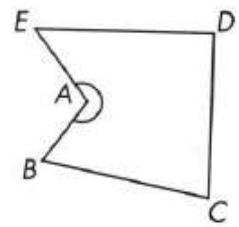
▼ Por sus ángulos, los polígonos se clasifican en:

Convexo
Polígono en el cual los ángulos interiores son todos menores que 180°.



Cóncavo
Polígono en el cual uno de sus ángulos interiores es mayor que 180°.

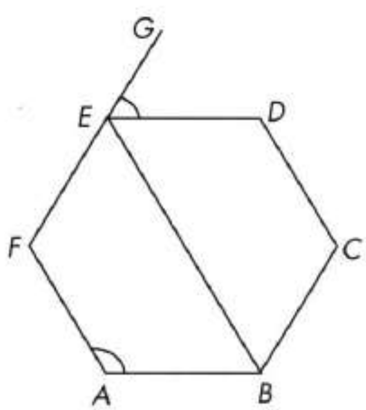
$\angle A > 180°$



Los polígonos reciben un nombre de acuerdo a su número de lados:

Número de lados	Nombre	Número de lados	Nombre
3	Triángulo	12	Dodecágono
4	Cuadrilátero	13	Tridecágono
5	Pentágono	14	Tetradecágono
6	Hexágono	15	Pentadecágono
7	Heptágono	16	Hexadecágono
8	Octágono	17	Heptadecágono
9	Nonágono	18	Octadecágono
10	Decágono	19	Nonadecágono
11	Undecágono	20	Icoságono

▼ Elementos de los polígonos



Vértice
Es el punto donde concurren dos lados, por ejemplo: el vértice A.

Ángulo interior
Es el que se forma con dos lados adyacentes de un polígono, por ejemplo: $\angle BAF$.

Medida de un ángulo interior $\hat{i} = \dfrac{180°(n-2)}{n}$.

Suma de los ángulos interiores de un polígono $S_i = 180°\,(n-2)$.

Ángulo exterior
Es el que se forma entre la prolongación de uno de los lados y su lado adyacente, por ejemplo: $\angle DEG$.

Diagonal
Es el segmento de recta que une dos vértices no adyacentes, por ejemplo: $\overline{BE}$.

Diagonales trazadas desde un vértice $d = n - 3$.

Diagonales totales trazadas en un polígono $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Un polígono tiene el mismo número de lados n que de ángulos interiores, así como exteriores.

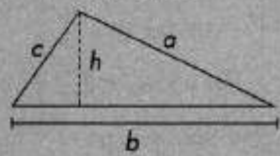
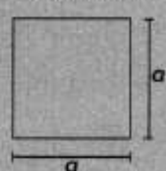
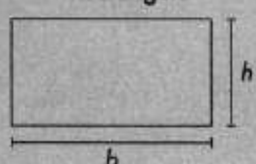
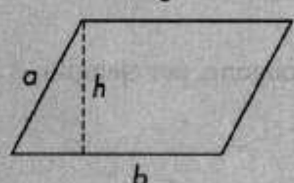
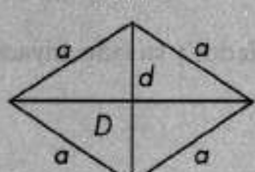
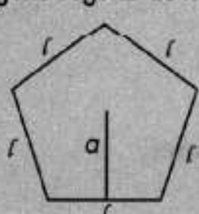
Áreas y perímetros

▼ Perímetro

Es la suma de las longitudes de los lados de un polígono.

▼ Área o superficie

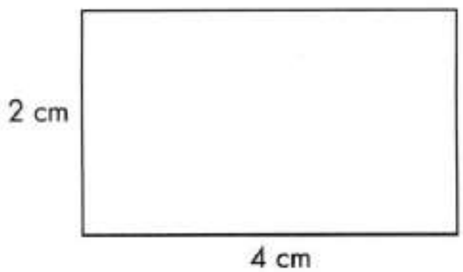
Región del plano limitada por los lados de un polígono.

Figura	Fórmulas	Nomenclatura
Triángulo 	Perímetro $P = a + b + c$ Área $A = \frac{1}{2}bh = \frac{bh}{2}$	a, b, c: Lados del triángulo b: Base h: Altura
Cuadrado 	Perímetro $P = 4a$ Área $A = a^2$	a: Lado del cuadrado
Rectángulo 	Perímetro $P = 2b + 2h$ Área $A = bh$	b: Base h: Altura
Paralelogramo 	Perímetro $P = 2a + 2b$ Área $A = bh$	a, b: Lados del paralelogramo h: Altura
Rombo 	Perímetro $P = 4a$ Área $A = \frac{d \cdot D}{2}$	a: Lado del rombo d: Diagonal menor D: Diagonal mayor
Polígono regular de n lados 	Perímetro $P = n\ell$ Área $A = \frac{P \cdot a}{2}$	ℓ: Lado del polígono n: Número de lados a: Apotema

Ejemplos

1. Halla el perímetro y el área de un rectángulo de lados 4 cm y 2 cm.

Solución:
Al sustituir los valores respectivos en las fórmulas del rectángulo, se obtiene:



Perímetro

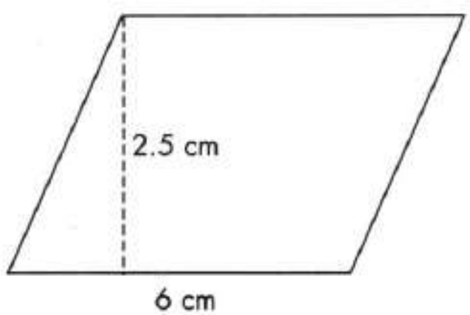
$P = 2b + 2h$
$P = 2(4\text{ cm}) + 2(2\text{ cm})$
$P = 8\text{ cm} + 4\text{ cm}$
$P = 12\text{ cm}$

Área

$A = b \cdot h$
$A = (4\text{ cm})(2\text{ cm})$
$A = 8\text{ cm}^2$

2. Halla el área de un paralelogramo de 6 cm de base y 2.5 cm de altura.

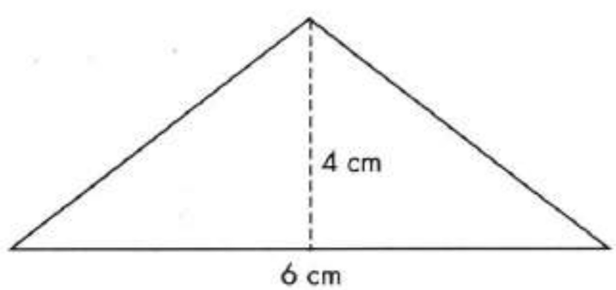
Solución:
Se sustituyen los valores de $b = 6$ cm y $h = 2.5$ cm, entonces:



Área

$A = bh$
$A = (6\text{ cm})(2.5\text{ cm})$
$A = 15\text{ cm}^2$

3. Halla el área del triángulo cuya base y altura son 6 cm y 4 cm respectivamente.



Solución:
Al sustituir los valores en la fórmula, se obtiene:

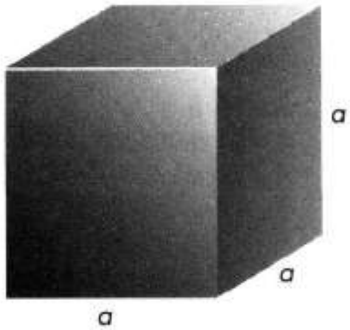
$$A = \frac{bh}{2} = \frac{(6\text{ cm})(4\text{ cm})}{2} = \frac{24\text{ cm}^2}{2} = 12\text{ cm}^2$$

Por tanto, el área del triángulo es de 12 cm^2.

Volumen de cuerpos geométricos

Se le llama volumen a la magnitud del espacio ocupado por un cuerpo geométrico.

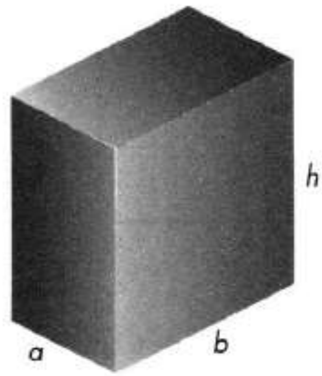
Cubo



$V = a^3$

a = longitud de la arista

Prisma rectangular (paralelepípedo)



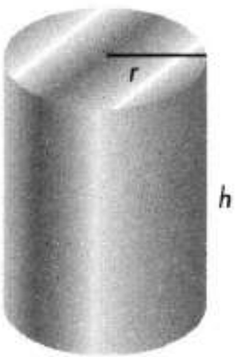
$V = abh$

a = largo

b = ancho

h = altura

Cilindro circular



$V = \pi r^2 h$

r = radio

h = altura

Cono

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

r = radio

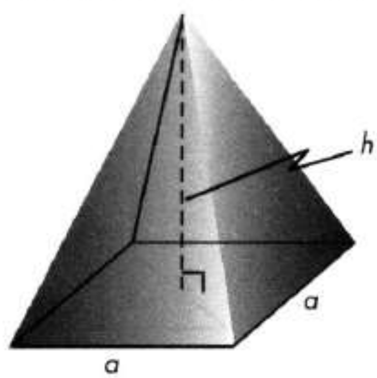
h = altura

Esfera

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

r = radio

Pirámide de base cuadrada



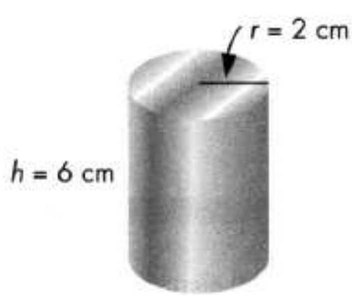
$V = \frac{1}{3}a^2 h$

a = lado de la base

h = altura

Ejemplos

1. Observa la figura:



De acuerdo con ella, ¿cuál es el volumen del cilindro circular?

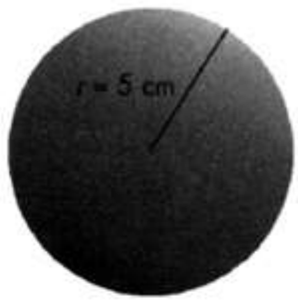
Solución:
La fórmula del volumen para el cilindro circular recto es:

$$V = \pi r^2 h$$

Al sustituir $r = 2$ cm y $h = 6$ cm, se obtiene:

$$V = \pi r^2 h = \pi(2\text{ cm})^2(6\text{ cm}) = \pi(4\text{ cm}^2)(6\text{ cm}) = 24\pi\text{ cm}^3$$

2. Observa la figura:



De acuerdo con ella, ¿cuál es el volumen de la esfera?

Solución:
La fórmula para el volumen de una esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Al sustituir $r = 5$ cm, se obtiene:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\ (5\text{ cm})^3 = \frac{4}{3}\pi\ (125\text{ cm})^3 = \frac{500}{3}\pi\text{ cm}^3$$

Circunferencia y círculo

▼ Círculo

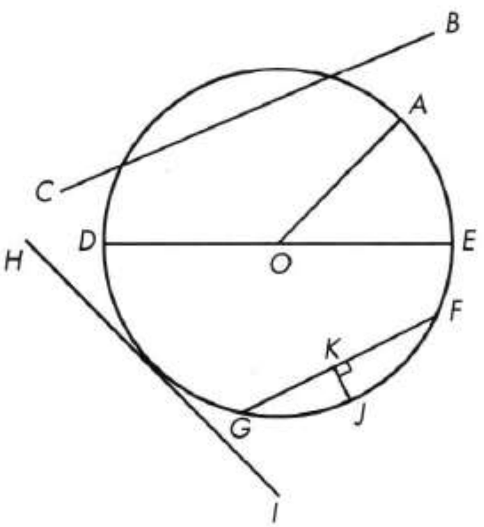
Es la superficie limitada por una circunferencia.

▼ Circunferencia

Es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro y su longitud representa el perímetro del círculo.

Rectas notables en la circunferencia

- **Radio**. Es el segmento de recta unido por el centro y un punto cualquiera de la circunferencia.
- **Cuerda**. Es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia sin pasar por el centro.
- **Diámetro.** Es la cuerda más grande que une dos puntos opuestos de la circunferencia y pasa por el centro.
- **Secante.** Es la recta que pasa por dos puntos de la circunferencia.
- **Tangente**. Es la línea recta que tiene sólo un punto en común con la circunferencia.
- **Flecha o sagita**. Es la perpendicular trazada de un punto de la circunferencia al punto medio de una cuerda.



$\overline{OA}$: Radio

$\overline{DE}$: Diámetro

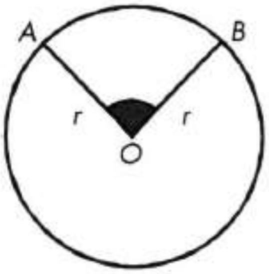
$\overleftrightarrow{BC}$: Secante

$\overleftrightarrow{HI}$: Tangente

$\overline{FG}$: Cuerda

$\overline{KJ}$: Sagita o flecha

Ángulos en la circunferencia y el círculo

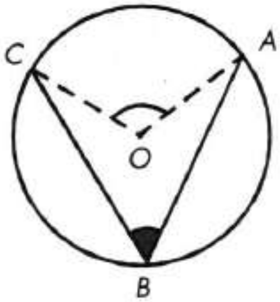


Ángulo central

Está formado por dos radios o bien por un diámetro y un radio, y tiene su vértice en el centro.

La medida de un ángulo central es igual al arco comprendido entre sus lados.

$$\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$$

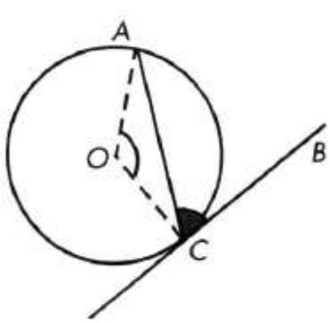


Ángulo inscrito

Tiene su vértice en un punto de la circunferencia y está formado por un par de cuerdas.

La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.

$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

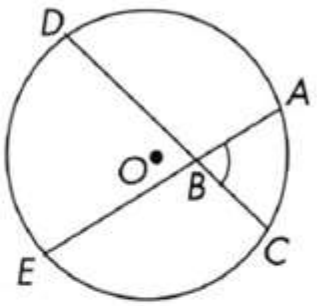


Ángulo semi-inscrito

Tiene su vértice en un punto de la circunferencia y está formado por una cuerda y una tangente.

La medida de un ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.

$$\angle ACB = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

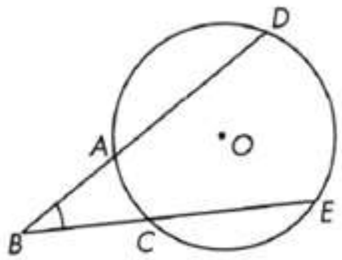


Ángulo interior

Tiene su vértice en un punto interior a la circunferencia y está formado por dos cuerdas que se cortan.

La medida de un ángulo interior es igual a la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones.

$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE}}{2}$$

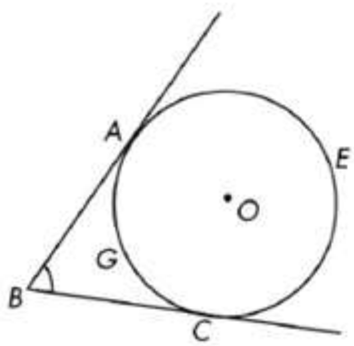


Ángulo exterior

Tiene su vértice en un punto exterior a la circunferencia y está formado por dos secantes.

La medida de un ángulo exterior es la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{AC}}{2}$$



Ángulo circunscrito

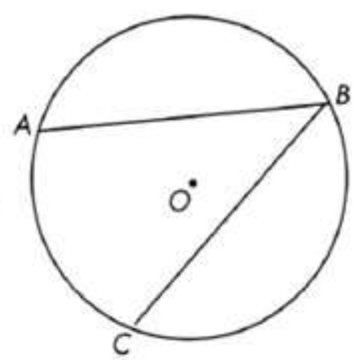
Está formado por dos tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia.

La medida de un ángulo circunscrito es igual a la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AEC} - \overset{\frown}{AGC}}{2}$$

Ejemplos

1. En la siguiente figura $AC = 80°$.



El valor del ángulo $\angle ABC$ es:

Solución:

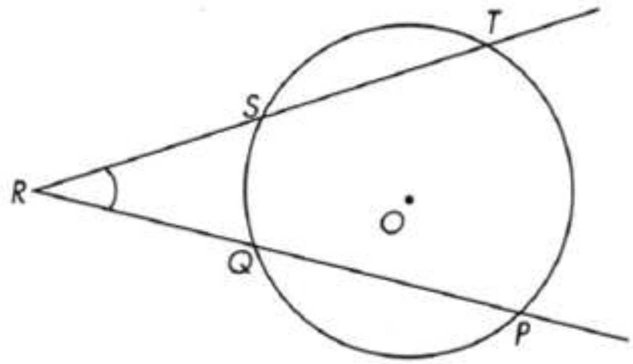
El ángulo $\angle ABC$ es inscrito, su fórmula es:

$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

si $AC = 80°$, entonces:

$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{80°}{2} = 40°$$

2. Observa la siguiente figura:



Si $PT = 70°$ y $QS = 28°$, el valor del ángulo $\angle PRT$ es:

Solución:

El ángulo $\angle PRT$ es exterior, entonces:

$$\angle PRT = \frac{\overset{\frown}{PT} - \overset{\frown}{QS}}{2}$$

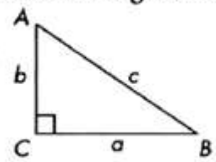
al sustituir los valores de los arcos $\overset{\frown}{PT} = 70°$ y $\overset{\frown}{QS} = 28°$, se obtiene:

$$\angle PRT = \frac{\overset{\frown}{PT} - \overset{\frown}{QS}}{2} = \frac{70° - 28°}{2} = \frac{42°}{2} = 21°$$

Razones trigonométricas

▼ Triángulo rectángulo

Es el triángulo que tiene un ángulo recto (90°); a los lados que forman el ángulo recto se les llama catetos y el lado que se opone a dicho ángulo se llama hipotenusa.



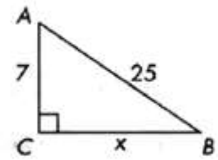
c: hipotenusa
a, b: catetos
$\angle A$, $\angle B$: ángulos agudos
$\angle A + \angle B = 90°$
$\angle C = 90°$

➤ Teorema de Pitágoras

Establece la relación entre los lados de un triángulo rectángulo. $(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto } 1)^2 + (\text{cateto } 2)^2$

Ejemplo

¿Cuál es el valor de lado x en el siguiente triángulo?



Solución:

Al aplicar el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$(\text{hip.})^2 = (\text{cat.})^2 + (\text{cat.})^2 \quad \rightarrow \quad (25)^2 = (7)^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad 625 = 49 + x^2$$

$$625 - 49 = x^2$$

$$576 = x^2$$

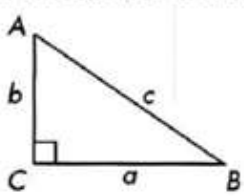
$$x = \sqrt{576} = 24$$

➤ Razones trigonométricas

Son las relaciones por cociente entre los lados de un triángulo rectángulo.

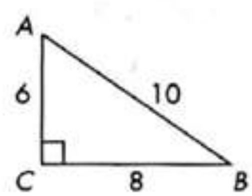
	Abreviatura		**Abreviatura**
Seno $= \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	**sen** θ	**Cotangente** $= \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$	**cot** θ = **ctg** θ
Coseno $= \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	**cos** θ	**Secante** $= \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$	**sec** θ
Tangente $= \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	**tan** θ = **tg** θ	**Cosecante** $= \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$	**csc** θ

En el triángulo ABC los catetos se designan de acuerdo al ángulo del que se desea obtener sus razones trigonométricas.



Para el ángulo A	Para el ángulo B
c: hipotenusa	c: hipotenusa
a: cateto opuesto	b: cateto opuesto
b: cateto adyacente	a: cateto adyacente

Ejemplos



1. ¿Cuál es el coseno del ángulo B en el siguiente triángulo?

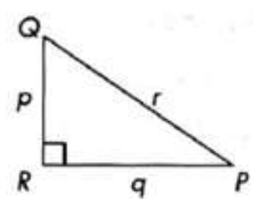
Solución:

Para el ángulo B cateto opuesto = 6 cateto adyacente = 8 hipotenusa = 10

Luego

$$\cos B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{8}{10}$$

2. De acuerdo con la figura, la razón $\dfrac{q}{p}$ corresponde a la función:



Solución:

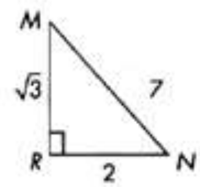
Para el ángulo Q

cateto opuesto = q cateto adyacente = p hipotenusa = r

La razón $\frac{q}{p}$ es:

$$\frac{q}{p} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \tan Q$$

3. En el siguiente triángulo el seno del ángulo M y la secante de N son:



Solución:

Para el ángulo M,

cateto opuesto = 2 ; cateto adyacente = $\sqrt{3}$; hipotenusa = 7

La razón trigonométrica seno se define por:

$$\text{sen } M = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{2}{7}$$

Para el ángulo N,

cateto opuesto = $\sqrt{3}$; cateto adyacente = 2 ; hipotenusa = 7

La razón trigonométrica secante se define por:

$$\sec N = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{7}{2}$$

Solución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo es hallar la medida de los ángulos y lados faltantes en función de los datos proporcionados.

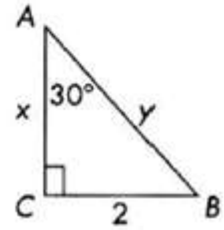
Para resolver un triángulo se utiliza tanto el teorema de Pitágoras como las funciones trigonométricas.

▼ Valores de funciones trigonométricas para ángulos notables 0°, 90°, 180°, 270° y 360°

Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Grados	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0

Ejemplos

1. El valor de los lados x, y y el ángulo B es:



Solución:

La suma de ángulos agudos es 90°: $\angle A + \angle B = 90°$ $\rightarrow$ $30° + \angle B = 90°$

$$\angle B = 90° - 30°$$
$$\angle B = 60°$$

Para el ángulo $A = 30°$

cateto opuesto = 2 cateto adyacente = x hipotenusa = y

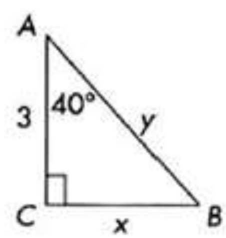
El valor de x se obtiene utilizando una función trigonométrica que relacione el cateto opuesto y el cateto adyacente

$$\tan 30° = \frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad x \tan 30° = 2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2}{\tan 30°} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

El valor de y se obtiene utilizando una función trigonométrica que relacione el cateto opuesto y la hipotenusa

$$\text{sen } 30° = \frac{2}{y} \quad \rightarrow \quad y \text{ sen } 30° = 2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{2}{\text{sen } 30°} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

2. En el siguiente triángulo:



El valor de x se obtiene con la expresión:

Solución:

Para el ángulo $A = 40°$

cateto opuesto = x y cateto adyacente = 3

Se elige la función que relacione el cateto opuesto y el cateto adyacente

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \quad \rightarrow \quad \tan 40° = \frac{x}{3} \quad \rightarrow \quad x = 3 \tan 40°$$

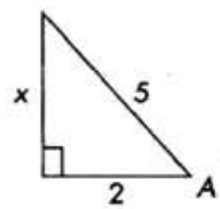
3. Si $\cos A = \dfrac{2}{5}$, el valor de sen A es:

Solución:

La razón coseno se define por:

$$\cos A = \frac{2}{5} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Se construye un triángulo con $\angle A$ uno de los ángulos agudos y se colocan los datos:



Se aplica el teorema de Pitágoras para determinar el valor del lado restante

$$5^2 = x^2 + 2^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 25 - 4 \quad \rightarrow \quad x^2 = 21 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{21}$$

Por consiguiente, la función seno se define como:

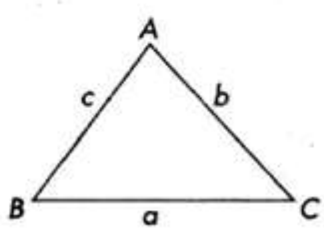
$$\text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{5} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Ley de los senos y ley de los cosenos

Se aplican para la resolución de triángulos oblicuángulos, esto es, triángulos que no tienen un ángulo de 90°.

Ley de los senos

La razón que existe entre un lado de un triángulo oblicuángulo y el seno del ángulo opuesto a dicho lado, es proporcional a la misma razón entre los lados y ángulos restantes.



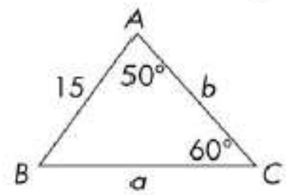
$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Se aplica si se conocen:

- Dos lados y un ángulo opuesto a uno de esos lados.
- Dos ángulos y un lado opuesto a uno de esos ángulos.

Ejemplos

1. El valor de a en el triángulo ABC, se resuelve con la operación:

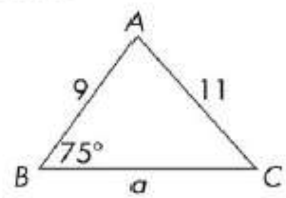


Solución:

Por ley de senos $\dfrac{a}{\text{sen } 50°}=\dfrac{15}{\text{sen } 60°}=\dfrac{b}{\text{sen } B}$, se toma la primera igualdad para despejar a, entonces,

$$\frac{a}{\text{sen } 50°}=\frac{15}{\text{sen } 60°} \quad \rightarrow \quad a=\frac{15 \text{ sen } 50°}{\text{sen } 60°}$$

2. El ángulo C se obtiene con la expresión:



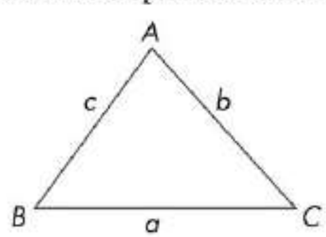
Solución:

Por ley de senos $\dfrac{a}{\text{sen } A}=\dfrac{11}{\text{sen } 75°}=\dfrac{9}{\text{sen } C}$, se toma la igualdad $\dfrac{11}{\text{sen } 75°}=\dfrac{9}{\text{sen } C}$ y se despeja sen C:

$$\frac{11}{\text{sen } 75°}=\frac{9}{\text{sen } C} \quad \rightarrow \quad 11 \text{ sen } C = 9 \text{ sen } 75° \quad \rightarrow \quad \text{sen } C=\frac{9 \text{ sen } 75°}{11}$$

▼ Ley de los cosenos

El cuadrado de un lado de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo opuesto al lado buscado.



$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A} \quad \rightarrow \quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B} \quad \rightarrow \quad \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

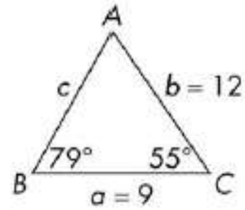
$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C} \quad \rightarrow \quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Se aplica si se conocen:

- Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- Tres lados.

Ejemplos

1. El valor del lado c en el siguiente triángulo, se obtiene con la expresión:



a) $c=\sqrt{(9)^2-(12)^2-2(9)(12)\cos 55°}$

b) $c=\sqrt{(9)^2+(12)^2-2(9)(12)\cos 79°}$

c) $c=\sqrt{(9)^2+(12)^2-2(9)(12)\cos 55°}$

d) $c=\sqrt{(9)^2+(12)^2+2(9)(12)\cos 55°}$

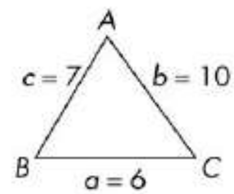
Solución:

El lado c se obtiene con la fórmula:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \quad \rightarrow \quad c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$$

Por tanto, $c=\sqrt{(9)^2+(12)^2-2(9)(12)\cos 55°}$ la opción correcta es el inciso c.

2. En el triángulo ABC, el valor del ángulo A se obtiene con la expresión:



a) $\cos A=\dfrac{(6)^2+(7)^2-(10)^2}{2(6)(7)}$

b) $\cos A=\dfrac{(10)^2+(7)^2-(6)^2}{2(10)(6)}$

c) $\cos A=\dfrac{(10)^2+(6)^2-(7)^2}{2(10)(6)}$

d) $\cos A=\dfrac{(10)^2+(7)^2-(6)^2}{2(10)(7)}$

Solución

En el triángulo se conocen los 3 lados, el ángulo A se obtiene con la fórmula:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Por consiguiente, $\cos A=\dfrac{(10)^2+(7)^2-(6)^2}{2(10)(7)}$.

Razones trigonométricas para un ángulo en cualquier cuadrante

▼ Signos de las funciones trigonométricas

	I cuadrante	II cuadrante	III cuadrante	IV cuadrante
Seno	+	+	–	–
Coseno	+	–	–	+
Tangente	+	–	+	–
Cotangente	+	–	+	–
Secante	+	–	–	+
Cosecante	+	+	–	–

Funciones para ángulos mayores a 90°

Cualquier función trigonométrica de un ángulo mayor a 90° se expresa en la forma $(n \cdot 90° \pm \theta)$, conservando el signo correspondiente a la función dada, donde n es un entero positivo y θ es un ángulo cualquiera, el cual es equivalente a:

- La misma función de θ si n es un número par.
- La cofunción correspondiente de θ si n es un número impar.

Función		Cofunción
seno	⟷	coseno
tangente	⟷	cotangente
secante	⟷	cosecante

Ejemplos

1. El valor de cos 150° es equivalente a:

Solución:
El ángulo de 150° se encuentra en el segundo cuadrante, donde coseno es negativo, luego

$$150° = (2 \cdot 90° - 30°)$$

El número que multiplica a 90° es par, el resultado se expresa con la misma función, por tanto:

$$\cos 150° = -\cos 30°$$

2. El valor de cos 300° es equivalente a:

Solución:
El ángulo de 300° se encuentra en el cuarto cuadrante, donde coseno es positivo, luego

$$300° = (3 \cdot 90° + 30°)$$

El número que multiplica a 90° es impar, el resultado se expresa con la cofunción

$$\cos 300° = \operatorname{sen} 30°$$

3. El valor de tan 135° es equivalente a:

Solución:
El ángulo de 135° se encuentra en el segundo cuadrante, donde la tangente es negativa, por tanto,

$$\tan 135° = \tan (2 \cdot 90° - 45°) = -\tan 45° = -1$$

Identidades trigonométricas básicas

Son las relaciones que existen entre las razones trigonométricas y se dividen en:

a) Identidades recíprocas

$\text{sen } \theta \cdot \csc \theta = 1$ $\quad \tan \theta \cdot \cot \theta = 1$ $\quad \cos \theta \cdot \sec \theta = 1$

b) Identidades de cociente

$\tan \theta = \dfrac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$ $\quad \cot \theta = \dfrac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}$

c) Identidades pitagóricas

$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $\quad \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ $\quad \cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$

Ejemplos

1. La expresión sen θ es equivalente a:

Solución:
De la expresión $\text{sen } \theta \cdot \csc \theta = 1$, se despeja sen θ

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{\csc \theta}$$

2. La expresión cos θ es equivalente a:

Solución:
Se comprueba cada uno de los incisos:

a) $\dfrac{\tan \theta}{\csc \theta} = \dfrac{\frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}}{\frac{1}{\text{sen } \theta}} = \dfrac{\text{sen } \theta \cdot \text{sen } \theta}{\cos \theta} = \dfrac{\text{sen}^2 \theta}{\cos \theta}$, no es la respuesta correcta.

b) $\dfrac{\cot \theta}{\csc \theta} = \dfrac{\frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}}{\frac{1}{\text{sen } \theta}} = \dfrac{\cos \theta \cdot \text{sen } \theta}{\text{sen } \theta} = \cos \theta$

3. Una expresión equivalente a cot θ es:

Solución:
De la expresión $\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$ se despeja cot θ, entonces $\cot \theta = \dfrac{1}{\tan \theta}$
de la expresión $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$, se despeja tan θ

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \quad \rightarrow \quad \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 \quad \rightarrow \quad \tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1}$$

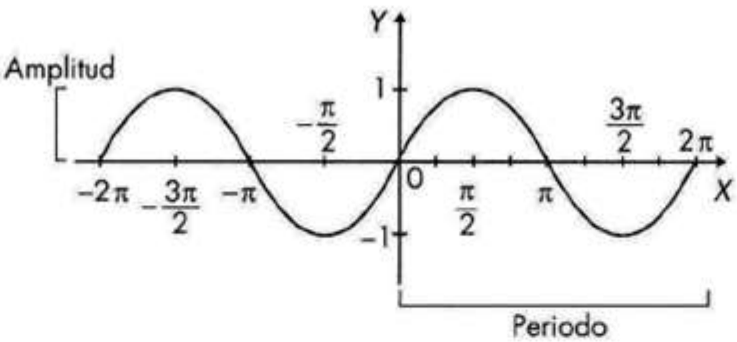
Por tanto,

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$$

Funciones trigonométricas

▼ Función seno ($y = \text{sen } x$)

Gráfica



Propiedades

Dominio = $(-\infty, \infty)$

Rango = $[-1, 1]$

Periodo = 2π

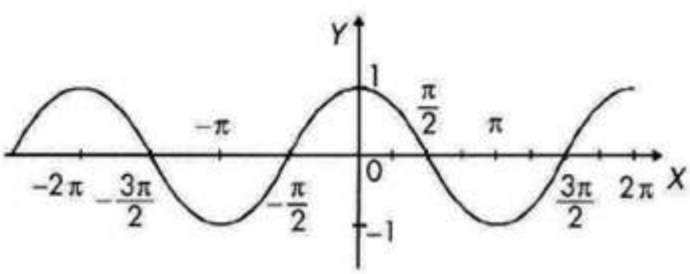
Amplitud = 1

Es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

Es decreciente en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

▼ Función coseno ($y = \cos x$)

Gráfica



Propiedades

Dominio = $(-\infty, \infty)$

Rango = $[-1, 1]$

Periodo = 2π

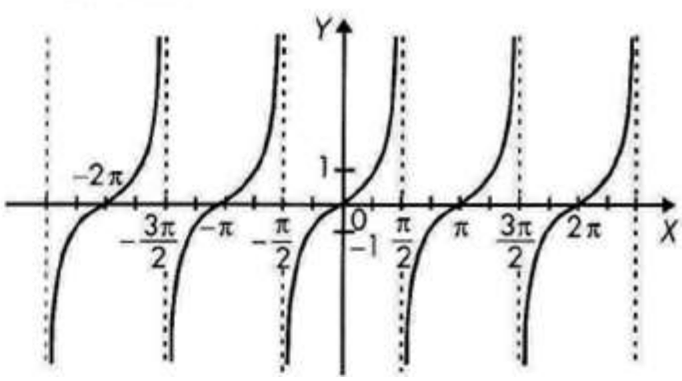
Amplitud = 1

Es creciente en el intervalo $(\pi, 2\pi)$

Es decreciente en el intervalo $(0, \pi)$

▼ Función tangente ($y = \tan x$)

Gráfica



Propiedades

Dominio = $\{x \in R \,/\, x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1) \text{ con } k \in Z\}$

Rango = $(-\infty, \infty)$

Periodo = π

Asíntotas = $\{x = \frac{\pi}{2}(2k+1) \text{ con } k \in Z\}$

Es creciente para todo $x \in D_f$

Función exponencial

Es de la forma $f(x) = a^x$ o $y = a^x$, donde a: constante, x: variable.

Ejemplo

¿Cuál de las siguientes funciones es una función exponencial?

Solución:

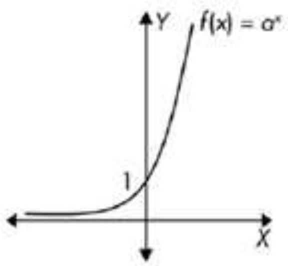
En una función exponencial la variable x es el exponente

▼ Gráfica y propiedades de la función exponencial

Sea la función $f(x) = a^x$, entonces,

Si $a > 1$

Gráfica

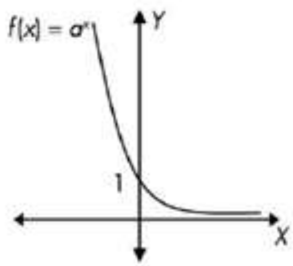


Propiedades

- La función es creciente.
- Interseca al eje Y en el punto $(0, 1)$.
- Es positiva para cualquier valor de x.
- El dominio son todos los números reales, $x \in (-\infty, \infty)$.
- El rango es el intervalo $(0, \infty)$.
- Su asíntota es el eje X con ecuación $y = 0$.

Si $0 < a < 1$

Gráfica



Propiedades

- La función es decreciente.
- Interseca al eje Y en el punto $(0, 1)$.
- Es positiva para cualquier valor de x.
- El dominio son todos los números reales, $x \in (-\infty, \infty)$.
- El rango es el intervalo $(0, \infty)$.
- Su asíntota es el eje X con ecuación $y = 0$.

▼ Ecuación exponencial

Una ecuación exponencial es una igualdad en la cual la incógnita se encuentra como exponente.

Ejemplos

1. El valor de x en $3^{x+1} = 9$ es:

Solución:

El resultado 9 se expresa como 3^2 $\quad 3^{x+1} = 9 \quad \rightarrow \quad 3^{x+1} = 3^2$

Para que la igualdad se cumpla, tanto la base como los exponentes deben ser iguales, entonces

$$x + 1 = 2 \quad \rightarrow \quad x = 2 - 1 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

2. El valor de x en $2^{3x-1} = 32$, es:

Solución:

El resultado 32 se expresa como 2^5, $\quad 2^{3x-1} = 32 \quad \rightarrow \quad 2^{3x-1} = 2^5$

Para que se cumpla la igualdad, las bases y los exponentes deben ser iguales, entonces:

$$3x - 1 = 5 \quad \rightarrow \quad 3x = 5 + 1 \quad \rightarrow \quad 3x = 6 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

3. El valor de y en la ecuación $5^{2y+1} = \dfrac{1}{25}$, es:

a) $\dfrac{3}{2}$ b) $-\dfrac{2}{3}$ c) $-\dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{2}{3}$

Solución:

El resultado se expresa como potencia de la base 5

$$5^{2y+1} = \frac{1}{25} \qquad \rightarrow \qquad 5^{2y+1} = 5^{-2}$$

Se igualan los exponentes, y se despeja y

$$2y + 1 = -2 \qquad \rightarrow \qquad 2y = -2 - 1 \qquad \rightarrow \qquad 2y = -3 \qquad \rightarrow \qquad y = -\frac{3}{2}$$

Función logarítmica

Es de la forma:

$$f(x) = \log_a x \qquad o \qquad y = \log_a x$$

Donde:

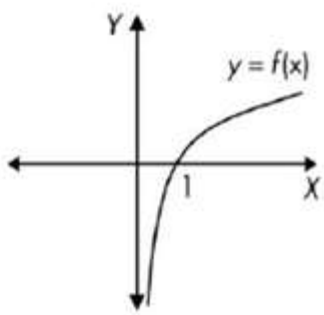
a = base, x = argumento o resultado, $f(x) = y$ = exponente

Se lee:

El logaritmo con base a de x es igual al exponente $f(x)$.

▼ Gráfica y propiedades de la función logarítmica

Gráfica



Propiedades

- La función es creciente.
- Interseca al eje X en el punto $(1, 0)$.
- El dominio es el intervalo $(0, +\infty)$.
- El rango son todos los números reales, $y \in (-\infty, +\infty)$.
- Su asíntota vertical es el eje Y con ecuación $x = 0$.

▼ Representación de la función logarítmica en su forma exponencial

Forma logarítmica		**Forma exponencial**
$y = \log_a x$	$\leftrightarrow$	$a^y = x$

Ejemplos

1. Una expresión equivalente a $\log_3 x = 2$, es:

Solución:
Se transforma $\log_3 x = 2$ a su forma exponencial, la base (3) elevada al exponente (2) es igual a su argumento (x), por consiguiente,

$$\log_3 x = 2 \qquad \rightarrow \qquad 3^2 = x$$

2. Una expresión equivalente a $\log_2 b = a$, es:

Solución:
La transformación del logaritmo es: la base (2) elevada al exponente (a) es igual al argumento (b):

$$\log_2 b = a \qquad \rightarrow \qquad 2^a = b$$

3. La forma logarítmica de $x^2 = y$, es:

Solución:
La transformación es: el logaritmo con base x de y es igual al exponente 2:

$$x^2 = y \qquad \rightarrow \qquad \log_x y = 2$$

➤ Propiedades de los logaritmos

Sean A y B dos números positivos:

1) $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$
2) $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$
3) $\log_a A^n = n \log_a A$
4) $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\log_a A$
5) $\log_a 1 = 0$
6) $\log_a a = 1$

Ejemplos

1. Una expresión equivalente a $\log_a x^2 y$, es:

Solución:
Al aplicar las propiedades de los logaritmos:

$$\log_a x^2y = \log_a x^2 + \log_a y = 2 \log_a x + \log_a y$$

2. Una expresión equivalente a $\log \frac{x^3}{y^2}$, es:

Solución:
Al aplicar las propiedades de los logaritmos:

$$\log \frac{x^3}{y^2} = \log x^3 - \log y^2 = 3 \log x - 2 \log y$$